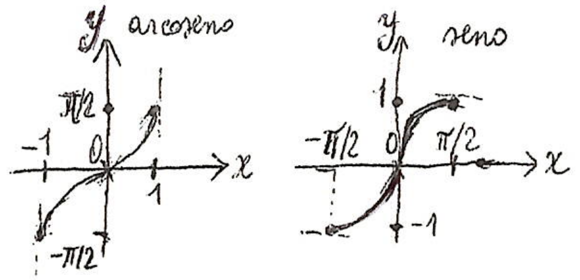
ESEMPI/ESERCIZI: DERIVATE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Vediamo la funzione $\arcsin x$. (la funzione inversa del seno, con $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)
Sia $y = \arcsin x$, e quindi $x = \sin y$.
Si ha: $\boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{D(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $-1<x<1$.

ma questo ha senso quando $x \in]-1,1[$, perché altrimenti il denominatore si annullerebbe. Inoltre osserviamo che, tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il coseno di y è positivo (estremi esclusi) [N.B.: con le nostre notazioni, è y che varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, ed x varia tra -1 e 1]. Quindi sceglieremo il valore positivo $+\sqrt{1-x^2}$ e non $-\sqrt{1-x^2}$. Il valore $\sqrt{1-x^2}$ viene dall'identità fondamentale $\boxed{\sin^2 y + \cos^2 y = 1}$: infatti, se $x = \sin y$, si ha $x^2 + \cos^2 y = 1$, da cui $\cos^2 y = 1 - x^2$.



Per quanto riguarda i punti 1 e -1, osserviamo che, in virtù della simmetria rispetto alla bisettrice del I e III Quadrante, poiché la retta tangente al grafico della funzione seno nel punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ è orizzontale, allora la retta tangente al grafico della funzione arcoseno nel punto $(1, \frac{\pi}{2})$ è verticale; analogamente, poiché la retta tangente al grafico della funzione seno nel punto $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ è orizzontale, allora la retta tangente al grafico della funzione arcoseno nel punto $(-1, -\frac{\pi}{2})$ è verticale.

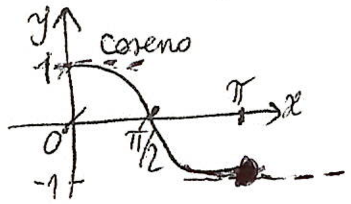
Pertanto, per il significato geometrico della derivata, i punti 1 e −1 sono punti di NON DERIVABILITÀ per la funzione arcoseno.

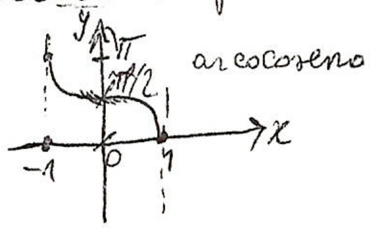
Vediamo ora la funzione arcocos x (la funzione inversa del coseno, con $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$, $\text{arcocos}: [-1,1] \to [0,\pi]$).

Sia $y = \text{arcocos}\, x$. Si ha: $x = \cos y$. Notiamo che, con queste notazioni, y varia tra 0 e π, mentre x varia tra -1 e 1. Inoltre notiamo che, tra 0 e π, estremi esclusi, $\sin y > 0$.

Si ha: $\boxed{D(\text{arcocos}\, x) = \dfrac{1}{D(\cos y)} = \dfrac{1}{-\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $-1<x<1$.

Infatti, dall'identità fondamentale $\boxed{\sin^2 y + \cos^2 y = 1}$ segue $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$, essendo $x \cos y$; ed essendo $\sin y > 0$, sceglieremo la radice positiva $\sqrt{1-x^2}$ e non $-\sqrt{1-x^2}$.





Per quanto riguarda i punti 1 e −1, notiamo che, a causa della simmetria rispetto alla bisettrice del I e del III Quadrante, poiché la retta tangente al grafico della funzione coseno nel punto $(0,1)$ è orizzontale, allora la retta tangente al grafico della funzione arcocoseno nel punto $(1,0)$ è verticale; in modo analogo, siccome la retta tangente al grafico della funzione coseno nel punto $(\pi,-1)$ è orizzontale, allora la retta tangente al grafico della funzione arcocoseno nel punto $(-1,\pi)$ è verticale. Pertanto i punti 1 e −1 sono punti di NON DERIVABILITÀ per la funzione arcocoseno.

Vediamo ora la funzione arctg x, $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\boxed{D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Poniamo infatti arctg $x = y$: si ha $x = \operatorname{tg} y$, e pertanto (derivazione della funzione inversa): $D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{D(\operatorname{tg} y)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y =$

$= \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$). Notiamo che

l'uguaglianza $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$ deriva dall'identità

fondamentale $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ infatti, dividendo per $\cos^2 y$, si ha

$\dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, cioè $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, da cui

$\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$.

Vediamo ora la funzione arcocotg x, $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\boxed{D(\operatorname{arcocotg} x) = -\frac{1}{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Sia infatti arcocotg $x = y$: si ha $x = \operatorname{cotg} y$, e quindi, in virtù della formula di derivazione della funzione inversa, si ottiene

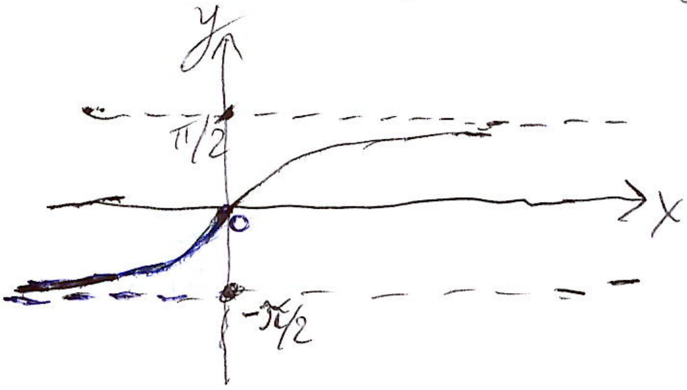
$$D(\operatorname{arcocotg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{cotg} y)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y \overset{(*)}{=}$$

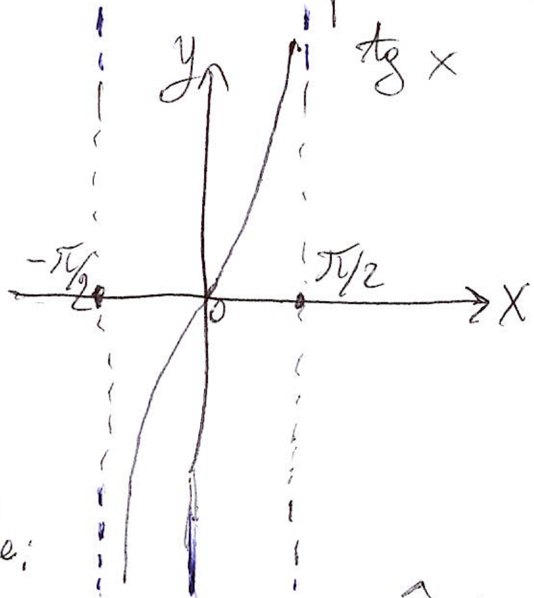
$= -\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$). Notiamo che (*) viene da $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$: infatti segue

$\dfrac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \dfrac{1}{\sin^2 y}$, cioè $1 + \operatorname{cotg}^2 y = \dfrac{1}{\sin^2 y}$, da cui

$\sin^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y}$.

Esercizio: Studiare $\hat{f}(x) = \operatorname{arctg} x$ come studio di funzione.





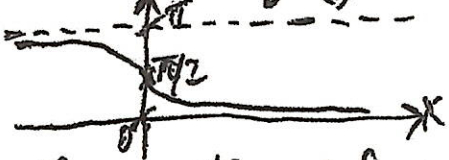
Dalle proprietà e dal grafico della funzione inversa, si vede che: il dominio di $\hat{f}$ è tutto $\mathbb{R}$; $\hat{f}(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $\hat{f}(x) < 0$ se e solo se $x < 0$, $\hat{f}(0) = 0$; $\hat{f}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ e quindi $\hat{}$ non ha asintoti verticali; $\lim_{x \to -\infty} \hat{f}(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to +\infty} \hat{f}(x) = \frac{\pi}{2}$, e pertanto le rette $y = \frac{\pi}{2}$ ed $y = -\frac{\pi}{2}$ sono i due asintoti orizzontali di $\hat{f}$, rispettivamente dai lati $+\infty$ e $-\infty$, e quindi $\hat{f}$ non ha asintoti obliqui. Inoltre abbiamo visto che $\hat{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi si ritrova che $\hat{f}$ è <u>STRETTAMENTE CRESCENTE</u> in tutto $\mathbb{R}$.

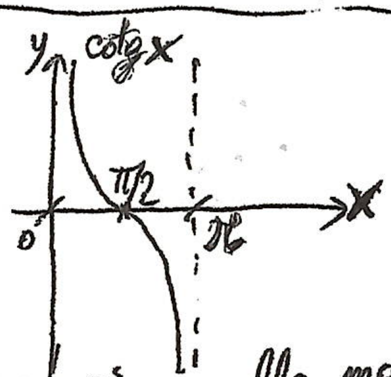
Calcoliamo la derivata seconda di $\hat{f}(x) = \operatorname{arctg} x$, cioè la derivata di $\frac{1}{1+x^2}$. Si ha: $D\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$

$$= \frac{D[1]\cdot(1+x^2) - 1\cdot D(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{D(1)+D(x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto $\hat{f}''(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, $\hat{f}''(x) < 0$ se e solo se $x > 0$ ed $\hat{f}''(0) = 0$. Quindi $\hat{f}$ è convessa (cioè rivolge la concavità verso l'alto) in $]-\infty, 0]$, è concava (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $[0, +\infty[$, e il punto 0 è un punto di flesso (essendoci il cambio di concavità).

$f^*(x) = \operatorname{arcocotg} x$





Dalle proprietà e dal grafico della funzione inversa, si vede che: il dominio di f^* è tutto $\mathbb{R}$; f^* è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ e non si annulla mai, e quindi non ha intersezioni con l'asse x, mentre l'(unica) intersezione del grafico di f^* con l'asse y è il punto $(0, \pi/2)$, in quanto $\operatorname{arcocotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, perché $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0$. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f^*(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f^*(x) = \pi$: pertanto le rette $y = 0$ (l'asse x) ed $y = \pi$ sono i due asintoti orizzontali di f^*, rispettivamente dal lato $+\infty$ e dal lato $-\infty$, e quindi f^* non ha asintoti obliqui. Inoltre è stato dimostrato che $(f^*)'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi f^* è STRETTAMENTE DECRESCENTE in tutto $\mathbb{R}$. Ma $(f^*)'(x) = -\hat{f}'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Facendo la derivata di entrambi i membri, si ha: $(f^*)''(x) = -\hat{f}''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $(f^*)''(x) \gtreqless 0$ se e solo se $x \gtreqless 0$. Pertanto f^* è convessa (cioè rivolge la concavità verso l'alto) in $[0, +\infty[$, è concava (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $]-\infty, 0]$ e il punto 0 è un punto di flesso (cambio di concavità).

N.B.: La derivata della funzione $\frac{1}{1+x^2}$ può essere calcolata anche nel seguente modo "alternativo", come derivata di funzione composta: $D\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = D(1+x^2)^{-1}$

Poniamo $w(x) = 1+x^2$. Allora $(1+x^2)^{-1} = w^{-1}$, e per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$D(1+x^2)^{-1} = D(w^{-1}) \cdot D(1+x^2) = (-1) \cdot w^{-2} \cdot 2x =$$

$$= -\frac{2x}{w^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$, ottenendo lo stesso risultato che si era trovato a pag. 185 di questi appunti (cioè nella pagina precedente).

ESERCIZIO: Calcolare

$LN_8)$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}$

Si ha: $\operatorname{arctg} 0 = 0$, quindi è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per il teorema de l'Hôpital, si ha:

$$LN_8) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{D(\operatorname{arctg} x)}{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{D(x)}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

come volevamo provare. Ora proviamo anche con de l'Hôpital il seguente limite notevole, che avevamo prima provato con un altro procedimento.

$LN_7)$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$ Si ha: $\operatorname{tg} 0 = 0$, pertanto siamo davanti a una forma $\frac{0}{0}$. Per il teorema de l'Hôpital, si ha:

$$\boxed{LN_7)} = \lim_{x\to 0} \frac{D(\operatorname{tg} x)}{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{D(x)}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \cos^2 x} = \frac{1}{\left(\lim_{x\to 0} \cos x\right)^2} = \frac{1}{1^2} = \boxed{1}.$$

Ora continuiamo a parlare di funzioni inverse.

Adesso, come $\boxed{\text{esempio/esercizio}}$, determiniamo la funzione inversa (se esiste) della funzione $f_*(x) = x+4$.

Notiamo che il dominio di f_*, cioè l'insieme di definizione di f_*, è tutto $\mathbb{R}$. Ora dimostriamo che f_* è iniettiva. Siano x_1 ed x_2 due qualsiasi numeri reali, tali che $f_*(x_1) = f_*(x_2)$. Allora $x_1 + 4 = x_2 + 4$, da cui $x_1 = x_2$. Quindi f_* è iniettiva. Adesso facciamo vedere che f_* è suriettiva (considerata come funzione $f_* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$). A questo scopo facciamo vedere che il codominio di f_* è tutto $\mathbb{R}$, cioè che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f_*(x) = y$, cioè $x + 4 = y$. Se da $x+4=y$ prendiamo $x = y-4$, allora troviamo che $y-4$ è il valore cercato, nel senso che $f_*(y-4) = (y-4)+4 = y$.

Allora, qual è la tecnica? Qual è il "trucco"?

Sostanzialmente, DETERMINARE, CALCOLARE IL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE f ($y = f(x)$) equivale a "DETERMINARE, TROVARE x (cioè tale che $f(x)=y$) IN FUNZIONE DI y", e VEDERE PER QUALI y HA SENSO FARE CIÒ. L'INSIEME DI TALI y È IL CODOMINIO di f.

Quindi, sostanzialmente, da $y = x+4$ si ricava $x = y-4$.

La funzione $x(y) = y-4$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Quindi il codominio di f_* è tutto $\mathbb{R}$.

La nostra "candidata" ad essere la funzione inversa è

$$f_*^{-1}(y) = y-4, \quad f_*^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dimostriamo che <u>veramente</u> la funzione f_*^{-1} è la funzione inversa della funzione f_*.

Dunque: $f_*(x) = x+4$, per ogni $x \in \mathbb{R}$;

$f_*^{-1}(y) = y-4$, per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha: $\boxed{f_*^{-1}(f_*(x))} = f_*^{-1}(x+4) = (x+4)-4 = \boxed{x}$.

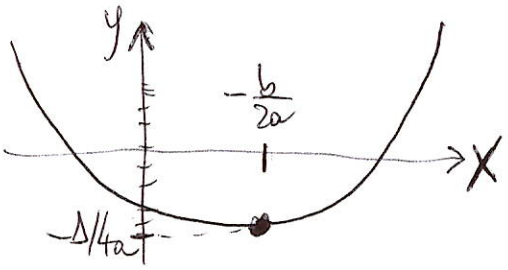
Inoltre, per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha: $\boxed{f_*(f_*^{-1}(y))} = f_*(y-4) = (y-4)+4 = \boxed{y}$.

Quindi <u>veramente</u> f_*^{-1} è la funzione inversa di f_* (ed f_* è la funzione inversa di f_*^{-1}).

ESEMPIO - ESERCIZIO (con INIETTIVITÀ e SURIETTIVITÀ)

MOLTO IMPORTANTE
Parabola come studio di funzione!

Sia $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$



La nostra parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ rivolge la concavità verso l'alto. Per quanto riguarda l'intersezione con gli assi, cioè le radici del trinomio $ax^2 + bx + c = 0$, sono possibili tre casi a seconda di $\Delta = b^2 - 4ac$, vedi (per corso) Parte 1, equazioni e disequazioni di secondo grado. Nella nostra figura $\Delta > 0$, ma il seguente procedimento si potrà fare comunque sia Δ.

Studiamo la f, ~~anche~~ se faremo lo studio completo della funzione. Si ha: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Determiniamo il codominio di f. Sostanzialmente, ci "ricaviamo x in funzione di y" e vediamo dove questa x è definita.

Da $y = ax^2 + bx + c$ si ricava $ax^2 + bx + c - y = 0$.

Assumiamo che y sia noto e ci ricaviamo la nostra "incognita" x in funzione di y. Si ottiene (mettendo $c-y$ al posto di c)

$$(*)\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a}$$

Notiamo che, per definire x in funzione di y, si deve avere $b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$, cioè $4ay \geq 4ac - b^2 = -\Delta$, ossia $\boxed{y \geq -\frac{\Delta}{4a}}$. Pertanto il codominio di f è $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.

Le x_1, x_2 in $(*)$ sono, per così dire, le due funzioni "pseudo-inverse" o "inverse locali".

Questo è un collegamento MOLTO PROFONDO con il fatto che l'ordinata del vertice della parabola (ossia il valore minimo che $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume) è $-\frac{\Delta}{4a}$. [ESERCIZIO] Si trova un solo punto x in corrispondenza del quale $y = -\frac{\Delta}{4a}$ (come si vede anche dal disegno): infatti, $y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ vuol dire $ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$, cioè $4a^2x^2 + 4abx + \cancel{4ac} = \cancel{4ac} - b^2$

$$\boxed{4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0}$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in x, si trova

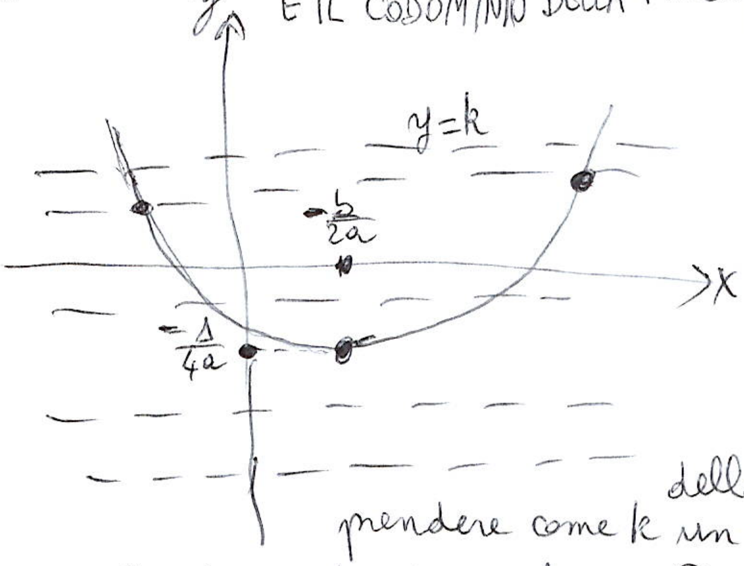
$$x_{1,2} = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - 16a^2b^2}}{8a^2} = -\frac{\cancel{4a}b}{\cancel{8a^2}_2} = -\frac{b}{2a}$$

Quindi l'unico punto x per il quale $y = -\frac{\Delta}{4a}$ è $x = -\frac{b}{2a}$. Si ritrovano quindi l'ordinata e l'ascissa del vertice della parabola, le cui coordinate sono

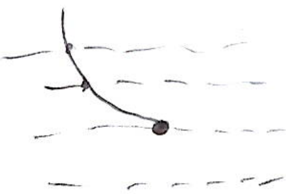
$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Dalla formula (*) $x_{1,2} = \dots$ si deduce che, quando $y > -\frac{\Delta}{4a}$, si ha che i due valori distinti x_1 ed x_2 danno luogo alla stessa immagine y, e quindi si ha la NON INIETTIVITÀ e diciamo, ci sono due funzioni "inverse" x_1, x_2 in funzione di y espresse dalla formula (*)
(o "pseudo-inverse")

COLLEGAMENTO PROFONDO FRA L'ORDINATA DEL VERTICE DELLA PARABOLA $\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ E IL CODOMINIO DELLA FUNZIONE PARABOLA

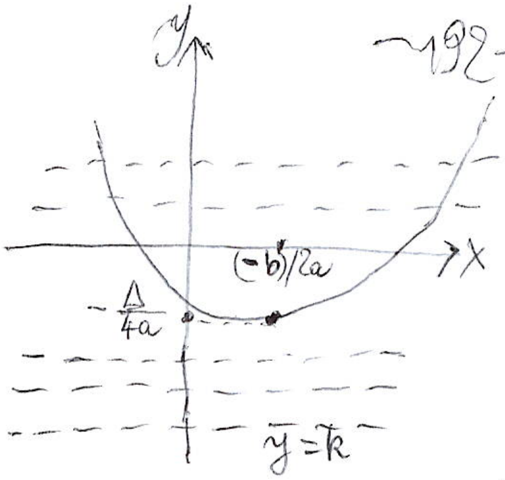


Notiamo graficamente che - globalmente - la parabola è NON INIETTIVA, perché esiste almeno un numero reale k tale che la retta y=k ha almeno 2 (in questo caso, proprio 2) intersezioni con il grafico della parabola: infatti basta prendere come k un qualsiasi numero STRETTAMENTE più grande di $-\frac{\Delta}{4a}$. Però se si prende ciascuno dei due "rami" della parabola: "ramo ~~sinistro~~", la restrizione di f definita in $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, allora per ogni k reale ciascuna retta del tipo y=k incontra il grafico del ramo ~~della~~ parabola in al più un punto (più precisamente esattamente in un punto, se $k \geq -\frac{\Delta}{4a}$; in nessun punto, se $k < -\frac{\Delta}{4a}$).



Quindi, in $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, la nostra funzione "parabola" f è iniettiva. Tra l'altro, si vede che, in $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, f è STRETTAMENTE DECRESCENTE (e la stretta decrescenza implica l'iniettività). La stessa "proprietà delle rette" (lo stesso discorso) vale se si prende il ramo "destro", cioè la restrizione di f definita in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

Quindi, anche in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$, la nostra funzione "parabola" f è iniettiva. Tra l'altro, si vede che, in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$, f è STRETTAMENTE CRESCENTE (e la stretta crescenza implica l'iniettività).



Ora notiamo graficamente che - globalmente - la parabola è NON SURIETTIVA, perché esiste almeno un numero reale k tale che la retta $y=k$ non incontra il grafico della parabola: infatti basta prendere come k un qualsiasi numero STRETTAMENTE più piccolo di $-\frac{\Delta}{4a}$.

Però, se la parabola la consideriamo come una funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[}_{\text{CODOMINIO di } f}$, allora diventa suriettiva: infatti per ogni $k \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$, la retta orizzontale $y=k$ incontra il grafico della parabola in almeno un punto, perché - visto che $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ è il codominio di f - ogni valore $k \geq -\frac{\Delta}{4a}$ viene assunto dalla nostra funzione "parabola".

La funzione $f : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ (Codominio di f) è suriettiva, continua, $f : \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \longrightarrow \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ è strettamente decrescente (quindi iniettiva) e anche suriettiva, dunque biiettiva, ed ammette la funzione inversa $h_1 : \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[\longrightarrow \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ data da (strettamente decrescente e continua) $h_1(y) = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}$. Inoltre $f : \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ è strettamente crescente (quindi iniettiva) e anche suriettiva, e pertanto biiettiva, e ha la funzione inversa $h_2 : \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ data da

$$h_2(y) = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}$$

, che sarà strettamente crescente e continua.

Se invece si considera la parabola $f(x) = y = ax^2+bx+c$ $(a>0)$ facendo lo studio di funzione, si ottiene che la sua derivata è $f'(x) = 2ax+b$. Il punto di minimo (assoluto) corrisponde a $f'(x) = 0$, cioè $2ax+b=0$, da cui $x = -\frac{b}{2a}$.
$f'(x) \underset{(<0)}{>0}$ se e solo se $x \underset{(<)}{>} -\frac{b}{2a}$. La f è crescente (strettamente) in $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ e decrescente (strettamente) in $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$. Quindi si ritrova $-\frac{b}{2a}$, l'ascissa del vertice della parabola, che coincide con il punto di minimo assoluto della parabola (COLLEGAMENTO PROFONDO!!!)

(Eser.: L'ordinata del vertice della parabola, $y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a}$, viene fuori se nell'espressione $y = ax^2+bx+c$ mettiamo $-\frac{b}{2a}$ al posto di x; infatti si ha:

$$y = \cancel{a}\cdot\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.)$$

Completiamo la parabola come studio di funzione
$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{, ovvero } f(x) = ax^2+bx+c$$
(lo facciamo solo nel caso $a>0$: analogo è il caso $a<0$)
Intanto, ribadiamo che il campo di esistenza o dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Per lo studio del segno e le intersezioni con gli assi, si vedano le disequazioni e le equazioni di secondo grado con la discussione dei vari casi (vedi Precorso/Parte I). Siccome f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, allora f è anche continua in tutto $\mathbb{R}$, e quindi non ci sono asintoti verticali. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (in quanto $a>0$), allora non ci sono asintoti orizzontali né dal lato $+\infty$ né dal lato $-\infty$. Vediamo ora gli asintoti obliqui. Calcoliamo $m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x}$ $\left(= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\right)$.
Per il principio di sostituzione degli infiniti, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a\cancel{x^2}^{\,x}}{\cancel{x}} = a\cdot\lim_{x\to\pm\infty} x = a\cdot(\pm\infty) = \pm\infty \ (a>0).$$ Quindi non ci sono asintoti obliqui.
Inoltre, $f'(x) = 2ax+b$ (come visto prima), quindi $f''(x) = 2a$. Essendo $a>0$, la f è sempre convessa (come sapevamo). Se fosse stato $a<0$, allora f sarebbe stata concava.

Facciamo un esempio di funzione "parabola"
E LA STUDIAMO IN TUTTI I SUOI ASPETTI. (NOTAZIONE: ϕ = phi, non è l'insieme vuoto)

Sia $\phi(x) = x^2 - 10x + 24$

Facciamo lo studio di funzione. (n.b.: $a=1, b=-10, c=24$)

Il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Per il segno della funzione e le intersezioni con l' asse delle x, risolviamo l'equazione

$x^2 - 10x + 24 = 0$

e le corrispondenti disequazioni: $\begin{cases} x^2 - 10x + 24 > 0 \\ x^2 - 10x + 24 < 0 \end{cases}$

Si ha: $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 96 = 4 > 0$

Si ha: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{smallmatrix} \nearrow 4 \\ \searrow 6 \end{smallmatrix}$

Le soluzioni sono: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

La funzione ϕ assume valori positivi per $x < 4$ oppure $x > 6$ (cioè $x \in]-\infty, 4[\cup]6, +\infty[$), negativi per $4 < x < 6$ (cioè $x \in]4, 6[$) e si annulla nei punti $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

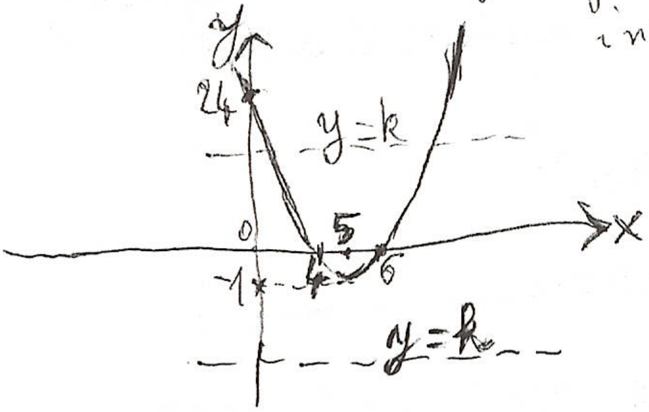
Quindi i punti $(4, 0)$ e $(6, 0)$ sono le due intersezioni dell grafico di ϕ con l' asse delle x $(y = 0)$.

Inoltre $\phi(0) = 24$, e pertanto il punto $(0, 24)$ è l' (unica) intersezione del grafico di ϕ con l' asse delle y.

Asintoti: Siccome $\lim_{x \to \pm\infty} \phi(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2$ (vince il grado più grande) $= +\infty$, allora non ci sono asintoti orizzontali.

Vediamo ora gli asintoti obliqui. Si ha:
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\phi(x)}{x}$ = (principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$. Pertanto non ci sono asintoti obliqui.
Infine, notiamo che ϕ è continua in tutto $\mathbb{R}$, e quindi non esistono asintoti verticali.
Derivata (= derivata prima): $\phi'(x) = 2x - 10\underbrace{D(x)}_{1} + \underbrace{D(24)}_{0} = \boxed{2x-10}$
Si ha: $\phi'(x) > 0$ se e solo se $2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$
$\phi'(x) < 0$ se e solo se $2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$
$\phi'(x) = 0$ se e solo se $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$
Pertanto, per il test di MONOTONIA, ϕ è strettamente decrescente per $x \leq 5$, cioè in $]-\infty, 5]$, ed è strettamente crescente per $x \geq 5$, cioè in $[5, +\infty[$.
Il punto $x = 5$ è un punto di minimo per ϕ (che risulterà MINIMO assoluto, come vedremo dal grafico).
Derivata seconda (derivata 2ª = derivata della derivata): essendo $\phi'(x) = 2x - 10$, sarà
$\phi''(x) = D(\phi'(x)) = 2D(x) - D(10) = 2 \cdot 1 - 0 = 2 > 0$
per ogni numero reale x, e quindi ϕ è sempre convessa cioè rivolge la concavità verso l'alto ($\cup$) sempre, in tutto $\mathbb{R}$ (ove $\mathbb{R}$ è l'insieme di tutti i numeri reali).
Adesso, una volta che sappiamo il punto di minimo della parabola, determiniamo il valore minimo di ϕ, cioè il valore che ϕ assume nel punto di minimo $x=5$.
Essendo $\phi(x) = x^2 - 10x + 24$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora, mettendo 5 al posto di x, si ha
$\boxed{\phi(5)} = 25 - 10 \cdot 5 + 24 = 49 - 50 = \boxed{-1}$. Il vertice della parabola è $(5, -1)$.
Verifichiamolo con il nostro COLLEGAMENTO PROFONDO. Si ha: $(-b)/2a = 10/2 = \boxed{5}$; $(-\Delta)/4a = (4ac - b^2)/4a = (96 - 100)/4 = (-4)/4 = \boxed{-1}$.

Adesso determiniamo "a mano" (cioè, calcolando la x in funzione della y e supponendo y noto, cioè y COME SE FOSSE UNA COSTANTE) il codominio di ϕ e le sue "funzioni pseudo-inverse" oppure "inverse locali". Non si può parlare di un'unica funzione inversa perché ϕ, globalmente, NON è iniettiva: infatti esiste almeno un numero reale k (abbastanza grande) tale che la retta orizzontale $y=k$ incontra il grafico della funzione ϕ in almeno due punti. Però ci sono due restrizioni (quella corrispondente al "ramo destro", definito in $[5, +\infty[$ e quella corrispondente al "ramo sinistro", definito in $]-\infty, 5]$) in cui ϕ è rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente, e quindi – in entrambi i casi – INIETTIVA.



Per quanto riguarda la SURIETTIVITÀ, notiamo che ϕ è globalmente NON SURIETTIVA (perché esiste almeno un numero reale k, diciamo $k<0$ e inoltre "abbastanza vicino a $-\infty$", tale che la retta orizzontale $y=k$ non incontra il grafico della funzione ϕ in nessun punto). Ma se prendiamo $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow Im(\mathbb{R}) = \phi(\mathbb{R}) = \{\phi(x) : x \in \mathbb{R}\}$ = codominio di ϕ, allora automaticamente ϕ è SURIETTIVA.

Dimostreremo, calcolando il codominio esprimendo la x in funzione della y, che il codominio della funzione ϕ è esattamente tutta la semiretta $[-1, +\infty[$.

Ora calcoliamo il codominio di ϕ, trovando la x in funzione della y, e considerando y come se fosse un numero già noto, praticamente come se fosse una costante. L'equazione della parabola $y=\phi(x)$ si scrive come $y=x^2-10x+24$

Per trovare x in funzione di y, non possiamo porre direttamente $x=\dots$, $x^2=\dots$, perché avremmo x in entrambi i membri, e potremmo essere in difficoltà. Allora (trucco!) PORTIAMO LA y nella stessa "parte", dove c'è anche la x, e facciamo in modo da avere il secondo membro uguale a zero, ottenendo così un'equazione di secondo grado, dove l'incognita è la x, e la y la si tratta come se fosse una "cosa nota". Allora poniamo $x^2-10x+24-y=0$ e pensiamo a quest'equazione di secondo grado, dove c'è anche la y come termine noto, e in cui l'(unica) incognita è la x. Si ha $\boxed{a=1, b=-10, c=24-y}$

$$x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot(24-y)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{100-96+4y}}{2}=$$

$$=\frac{10\pm\sqrt{4+4y}}{2}$$

. Per trovare il codominio di ϕ bisogna determinare "il campo di definizione della y", visto che, detto in modo semplice, "codominio $\equiv$ campo di definizione della funzione inversa oppure delle funzioni "pseudo-inverse"", cioè bisogna determinare per quali y ha senso quello che stiamo scrivendo. Siccome $\sqrt{t}$ = radice quadrata di t (ordine pari) ha senso se e solo se $t\geq 0$, allora la quantità $\sqrt{4+4y}$ ha senso se e solo se $4+4y\geq 0$, cioè $4y\geq -4$, ossia $\boxed{y\geq}-\frac{4}{4}=\boxed{-1}$. Quindi il codominio di ϕ è costituito da tutti e soli i punti y tali che $y\geq -1$, cioè dalla semiretta $[-1,+\infty[$.

Ciò lo possiamo dedurre anche dal teorema dei valori intermedi: infatti ϕ assume il valore -1, $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x)=+\infty$, e allora, per il teorema dei valori intermedi, ϕ assume tutti i valori compresi fra -1 e $+\infty$ (-1 COMPRESO; $+\infty$ escluso). La nostra ϕ assumerà anche altri valori? NO. Perché? Perché il valore -1 è il valore assunto da ϕ proprio nel suo punto di MINIMO ASSOLUTO, e quindi ϕ non può ammettere nessun valore strettamente minore di -1 (come si vede anche graficamente). Pertanto il codominio di ϕ è esattamente la semiretta $[-1,+\infty[$ (compreso -1).

Inoltre, nella pagina precedente abbiamo visto che

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{4+4y}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{4(1+y)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+y}}{2}=$$

$$=\frac{10\pm 2\cdot\sqrt{1+y}}{2}=5\pm\sqrt{1+y}.$$ Pertanto le espressioni delle funzioni "pseudo-inverse" o "inverse locali" sono date da

$x_1=5-\sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo sinistro" definito su $]-\infty,5]$, dove la nostra ϕ è strettamente decrescente) e

$x_2=5+\sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo destro", definito su $[5,+\infty[$, dove ϕ è strettamente crescente).

Per le proprietà delle funzioni inverse, il dominio della x_1 e della x_2 è quindi $[-1,+\infty[$, che è il codominio di ϕ, mentre il codominio di x_1 è uguale al dominio del "ramo sinistro" di ϕ, cioè $]-\infty, 5]$, e il codominio di x_2 è uguale al dominio del "ramo destro" di ϕ, cioè $[5,+\infty[$.